**MATRICI**

DEFINIZIONE: Una MATRICE a coefficienti reali (R) di tipo (m, n) è una tabella di m X n numeri reali organizzati in m RIGHE e n COLONNE.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a11 | a12 | … | a1j | … | a1n |
| a21 | a22 | … | a2j | … | a2n |
| … | …. | … | … | … |  |
| ai1 | ai2 | … | a1j | … | a1n |
| … | … | … | … | … |  |
| am1 | am2 | … | amj | … | amn |

L’insieme delle matrici di questo tipo (m, n) si indica con M n,m (R) oppure (M m X n (R) ; M(m, n, R)).

A ϵ Mm,n(R)

A=

aij ϵ R

A ϵ Mm,n(R)

A è un elemento generico di M

Si può scrivere in maniera più compatta: A= (aij) 🡪 ha senso se so qual è l’insieme delle matrici.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 5 |  |
| -4 | 1/3 | 0 |
| π | 0 | 7/ |

ES.

1) Matrice 3X3 ϵ M3,3(R)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Chi è a2,1? -4

2) Matrice 2X5 ϵ M2,5(R)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| -3 |  | -4/5 |
| 1/4 | 2 | 0 |
| 0 | 1 | -e |
| 7 | -8 | 1 |

3) Matrice 4X3 ϵ M4,3(R)

Chi è a3,4? NON C’è

Chi è a 4,3? 1

OSSERVAZIONE: In generale i coefficienti della matrice sono presi in un insieme numerico (che hanno in comune delle particolarità specifiche, dette CAMPI), ad esempio Q (numeri razionali), C (numeri complessi);

* **MATRICI UGUALI**

Per ogni i che va da 1 a m

DEFINIZIONE: 2 matrici A=(aij) e B=(bij) ϵ am,n(R) sono UGUALI se aij=bij ⩝i=1,…,m; ⩝j=1,…,m

A differenza degli insiemi dove si dicono uguali purché abbiano gli stessi elementi, le matrici oltre a ciò devono avere gli stessi elementi intabellati nello stesso modo.

* **MATRICE TRASPOSTA**

DEFINIZIONE: Data una matrice generica A=(aij) ϵ Mm,n(R), definiamo come MATRICE TRASPOSTA di A, Aᵗ=(aji) ϵ Mn,m(R).

Gli indici i e j si sono invertiti, così come anche m e n.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | -2 | 2 |
| 3 | 0 | -1 |
| 2 | 3 | 5 |

Cioè le matrice ottenuta scambiando in A le righe con le colonne

ES.

1) A= ϵ M3,3(R)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 3 | 2 |
| -2 | 0 | 3 |
| 4 | -1 | 5 |

Aᵗ= ϵ M3,3(R)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

2) A= ϵ M2,5(R)

|  |  |
| --- | --- |
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Aᵗ= ϵM5,2(R)

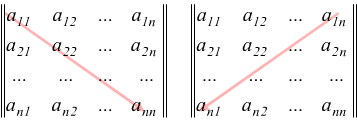
* **MATRICE QUADRATA**

DEFINIZIONE: Se n=m la matrice si dice QUADRATA (di ordine n) e si denota con Mn(R).

|  |  |
| --- | --- |
|  | -2/3 |
| 0 | 5 |

ES.

1. A ϵ M2(R)= M2(R)



DEFINIZIONE: Se ho una matrice quadrata di ordine n A Mn(R) i coefficienti aii R costituiscono la DIAGONALE PRINCIPALE di A

Una matrice quadrata e la sua trasposta hanno la stessa diagonale principale.

**OPERAZIONI SULLE MATRICI**

* **SOMMA**

DEFINIZIONE: Sull’insieme Mm,n(R) possiamo definire la seguente operazione di SOMMA:

Prodotto cartesiano

+: Mm,n(R) X Mm,n(R) 🡪 Mm,n(R)

( A= (aij), B=(bij) 🡪 A+B= (aij + bij)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| 6 | 0 | 1 |
| -1 | 1 | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 6 |
| 1 | 1 | 0 |

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | 2 |
| 0 | 3 |

ES.

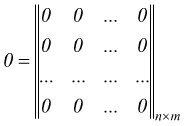
A= B = C=

A+C= NON SI Può FARE!

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | 4 | 6 |
| 8 | 4 | 7 |
| 0 | 2 | 2 |

A+B =

PROPRIETà DELLA SOMMA:

1. + è COMMUTATIVA: ⩝ A,B Mm,n(R) A+B=B+A
2. + è ASSOCIATIVA: ⩝ A,B,C Mm,n(R) (A+B)+C=A+(B+C)
3. + ammette un ELEMENTO NEUTRO: cioè ammette la MATRICE NULLA,

È quell’elemento che operato con altri elementi li lascia invariati, nel caso della somma è 0.

⩝ A Mm,n(R); 0 Mm,n(R)

A+0=0+A=A

1. Ogni elemento ammette il suo INVERSO (opposto) rispetto alla somma.

⩝ Aij = (aij) Mm,n(R) Ǝ -A Mm,n(R) tale che A+(-A)=0 dove (-A)= (-aij) MATRICE OPPOSTA di A ottenuta cambiando il segno a tutti i suoi coefficienti.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | -1 |
| -3 | 1 | 0 | -4 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | -1 | -2 | 1 |
| 3 | -1 | 0 | 4 |

ES.

A= -A=

* **PRODOTTO MATRICE PER SCALARE**

DEFINIZIONE: Scalare= numero reale,

⩝λ(lambda, numero reale) R, ⩝ A= (aij) Mm,n(R)

Definiamo l’operazione \*: R X Mm,n(R) 🡪 Mm,n(R)

(λ, A) 🡪 λA= (λaij)

Cioè λA è la matrice ottenuta moltiplicando per λ tutti i coefficienti di A.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| 0 | -1 | -2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| 0 | -1 | -2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | 4 | 6 |
| 0 | -2 | -4 |

ES.

λ=2 A= M2,3(R) λA= 2\* =

per essere moltiplicabili TRA DI LORO le matrici devono essere in un certo modo:

* **MATRICI MOLTIPLICABILI**

DEFINIZIONE: 2 matrici A, B sono MOLTIPLICABILI se e solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B, ovvero se e solo se A Mm,n(R) e B Mn,s(R).

* **PRODOTTO TRA MATRICI**

DEFINIZIONE: Se 2 matrici sono moltiplicabili possiamo definire il prodotto nel seguente modo:

⩝ A= (aij) Mm,n(R) , ⩝ B= (bij) Mn,s(R) definiamo la matrice A\*B= (cij) m,s(R)

cij= ossia il coefficiente (i, j) della matrice A\*B si ottiene moltiplicando gli elementi della i-esima riga di A e della j-esima colonna di B; per questo questo prodotto è detto anche MOLTIPLICAZIONE RIGHE PER COLONNE.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| 0 | -1 | -2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 | 4 | 5 |
| -1 | 0 | 7 |

ES.

1. A= B=

|  |  |
| --- | --- |
| -5 | 4  M2,2(R) |
| 1/2 | -3/4 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3  M2,3(R) |
| -1 | 0 | 7 |

A\*B= NON si può fare perché num. colonne A num. righe B!

1. A= B=

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| -5 | -14 | -23 |
| 1/2 | 7/4 | 3 |

A\*B=

B\*A NON si può fare!

|  |  |
| --- | --- |
| 4 | 1 |
| 0 | -2 |

|  |  |
| --- | --- |
| 0 | -3 |
| 4 | 0 |

1. A= M2,2(R) B= M2,2(R)

|  |  |
| --- | --- |
| 4 | -12 |
| -8 | 0 |

|  |  |
| --- | --- |
| 0 | 6 |
| 16 | 4 |

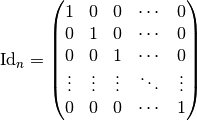
A\*B = B\*A=

OSSERVAZIONE: Possiamo definire una operazione di moltiplicazione interna a Mn(R) (matrici quadrate di ordine n) ⩝n 1; ⩝n

\*: Mn(R) X Mn(R) 🡪 Mn(R)

(A, B) 🡪 A\*B Questa operazione NON è commutativa

PROPRIETà DEL PRODOTTO in Mn(R)

1. \* è ASSOCIATIVO: ⩝ A,B,C Mn(R) (A\*B)\*C=A\*(B\*C)
2. \* ammette l’ELEMENTO NEUTRO: per il prodotto è l’1, per il prodotto tra matrici c’è la matrice I

Ǝ I Mn(R) tale che ⩝A Mn(R) A\*I=I\*A=A. I=(aij)

I si chiama MATRICE IDENTITà

1. Valgono le DISTRIBUTIVE della somma rispetto al prodotto

⩝A,B,C Mn(R) (A+B)\*C=A\*C+B\*C

A\*(B+C)=A\*B+A\*C

OSSERVAZIONE: Se ho 2 numeri reali a, b, se faccio la moltiplicazione a\*b e il risultato è 0, vuol dire che almeno uno tra i due è 0. Per le matrici non è così. Il prodotto tra 2 matrici può essere la matrice nulla anche senza che nessuna delle due lo sia.

**INVERSA DI UNA MATRICE**

DEFINIZIONE: A Mn(R). A si dice **INVERTIBILE** se e solo se Ǝ A’ Mn(R) tale che A\*A=A’\*A= I (matrice identità)(elemento neutro)

PROPOSIZIONE: Se A Mn(R) è INVERTIBILE la sua INVERSA è UNICA.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che Ǝ A’’ con la stessa proprietà: A\*A’’= A’’\*A= I

A’’=A’’\*I (elemento neutro)= A”\*(A\*A’)= (A”\*A)\*A’= I\*A’= A’

OSSERVAZIONE: Alla luce di quanto abbiamo appena provato, ovvero che la matrice inversa è UNICA, indichiamola, se esiste, con .

DOMANDE:

1. Come fare a stabilire se una matrice è invertibile?
2. Stabilire che se A sia invertibile, come trovare l’inversa?

* **DETERMINANTE**

DEFINIZIONE: . Il DETERMINANTE di A, si indica det(A) quel numero reale dato dalle seguenti formule:

* Se n=1 A= (a11) det(A)= a11
* Se , fisso una riga i, det(A)= dove Bij è la matrice ottenuta da A eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna;

oppure, fissata una colonna j det(A)=

OSSERVAZIONE: Si dimostra che la scelta della riga piuttosto che della colonna è ININFLUENTE.

ESEMPIO-OSSERVAZIONE: Nel caso delle matrici quadrate 2X2

|  |  |
| --- | --- |
| a | b |
| c | d |

A=

FORMULA DETERMINANTE MATRICE 2X2

Det(A)=

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | 2 |
| 4 | 6 |

ES.

1. A= det(A)= 1\*6 – 2\*4 = 6-8= -2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 | -3 | 1/3 |
| 0 | 4 | 1 |
| -1 | -1 | -1 |

|  |  |
| --- | --- |
| 4 | 1 |
| -1 | -1 |

|  |  |
| --- | --- |
| 0 | 1 |
| -1 | -1 |

1. A= det(A)= +

|  |  |
| --- | --- |
| 0 | 4 |
| -1 | -1 |

3\*(-3)-1\*(-3)(1)+1/3\*(4)= …

+ 1/3 =

TEOREMA: Sia A A è INVERTIBILE se e solo se il det(A)≠ 0.

* **COMPLEMENTO ALGEBRICO**

DEFINIZIONE: AIl COMPLEMENTO ALGEBRICO di un coefficiente aij. Vedendo la definizione del det(A)= quello evidenziato è il complemento algebrico.

* **MATRICE DEI COMPLEMENTARI ALGEBRICI DI A**

A. La MATRICE DEI COMPLEMENTARI di A è la matrice ottenuta scrivendo al posto di ogni coefficiente aij il suo complementare algebrico.

ES.

c11

a11

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 | -3 | 1/3  a23 |
| 0 | 4 | 1 |
| -1 | -1 | -1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| -3 | … | …  c23 |
| … | … | 6 |
| … | … | … |

A= ; =

|  |  |
| --- | --- |
| 4 | 1 |
| -1 | -1 |

c11= = … = -3

|  |  |
| --- | --- |
| 3 | -3 |
| -1 | -1 |

c23= = … = 6

ecc. ecc…

* **MATRICE INVERSA**

Stabilito che sia invertibile,

PROPOSIZIONE: Dato A invertibile (ossia det(A)≠0)

La MATRICE INVERSA DI A è data da:

, cioè è la trasposta della matrice dei complementari algebrici divisi per il det(A). Vuol dire dividere tutti gli elementi della matrice per il det(A) che è uno scalare.

Per determinare l’inversa di una matrice devo:

1. Calcolare il det(A);
2. Calcolare i complementi algebrici di tutti i coefficienti di A;
3. Scrivere la matrice dei complementi algebrici di A (
4. Trasporla in ;
5. Dividere per il det(A)